

IT@CookBook, 기초 신호 및 시스템(2판)

[연습문제 답안 이용 안내]

- 본 연습문제 답안의 저작권은 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전재하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

제9장 이산 시스템의 시간 영역 해석

[Quick Review]

※ 다음 문제에서 옳은 것을 골라라.

(1) 이산 시스템의 임펄스 응답은 물리적으로 구할 수 (있다, 없다).

Ans) 있다

(2) 입력의 이동 평균 항으로만 나타낼 수 있는 것은 (FIR, IIR) 시스템이다.

Ans) FIR

(3) IIR 시스템은 차분 방정식에 항상 자기 회귀 항을 포함한다. (○, ×)

Ans) ○

(4) 컨벌루션 표현에 의한 시스템 출력은 초기 상태에 의한 응답도 포함한다. (○, ×)

Ans) ×

(5) 시스템에 대한 컨벌루션 표현은 (비선형, 선형, 선형 시불변) 시스템에만 적용된다.

Ans) 선형 시불변

(6) 임펄스 응답이 임펄스가 아니면 (순시적, 동적) 시스템이다.

Ans) 동적

(7) 비인과 시스템은 $n < 0$ 에서 임펄스 응답의 값이 0이 아니다. (○, ×)

Ans) ○

(8) BIBO 안정한 이산 시스템의 임펄스 응답은 절대 (적분, 총합, 곱) 가능하다.

Ans) 총합

(9) 순시적 시스템은 BIBO 불안정할 수 있다. (○, ×)

Ans) ×

(11) 컨벌루션 계산이 진행되는 시간축과 결과를 표시하는 시간축은 같다. (○, ×)

Ans) ×

(12) 인과 신호와 비인과 신호의 컨벌루션은 $n < 0$ 에서도 값을 갖는다. (○, ×)

Ans) ○

(13) 길이 3과 길이 4인 두 이산 신호를 컨벌루션한 신호의 길이는 (3, 4, 6, 7, 12)이다.

Ans) 6

(14) 이산 시스템의 구현도는 (적분기, 미분기, 시간지연기, 곱셈기, 덧셈기)로 이루어진다.

Ans) 시간지연기, 곱셈기, 덧셈기

(15) 이산 시스템 구현도에서 제1 직접형과 제2 직접형은 시간 지연기 수가 같다. (○, ×)

Ans) ×

(16) 반복 대입법은 항상 닫힌 궤의 차분 방정식 해를 제공한다. (○, ×)

Ans) ×

(17) 차분 방정식의 특이해는 초기 조건과 상관없이 결정할 수 있다. (○, ×)

Ans) ○

(18) 임펄스 응답과 형태가 같은 것은 (동차해, 특이해, 없음)이다.

Ans) 동차해

(19) 특성근이 음의 실수이면 이산 LTI 시스템은 BIBO 안정이다. (○, ×)

Ans) ×

(20) 이산 시스템이 임계 안정이면 BIBO 안정이다. (○, ×)

Ans) ×

[기초 문제]

9.1 임펄스 응답이 $h[n] = (n+1)(u[n+1] - u[n-5])$ 인 이산 시스템이 만족하지 않는 성질을 모두 골라라.

- ㉠ 인과 시스템 ㉡ 불안정 시스템 ㉢ 동적 시스템 ㉣ IIR 시스템

Ans) ㉡, ㉣

9.2 이산 LTI 시스템의 입력 $x[n]$ 과 출력 $y[n]$ 이 다음과 같을 때, 임펄스 응답 $h[n]$ 을 구하라.

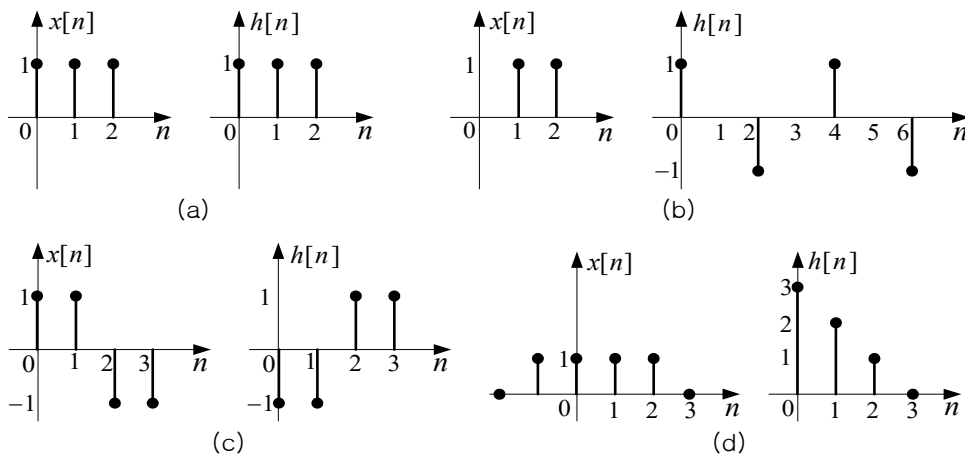
(a) $x[n] = 2\delta[n-1]$, $y[n] = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ans) $h[n] = \frac{2}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{8}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, \quad n \geq 0$
 $= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n, \quad n \geq 0$

(b) $x[n] = 3\delta[n-2]$, $y[n] = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9\left(\frac{1}{6}\right)^n$

Ans) $h[n] = \frac{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} + \frac{9}{3}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+2}, \quad n \geq 0$
 $= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{6}\right)^n, \quad n \geq 0$

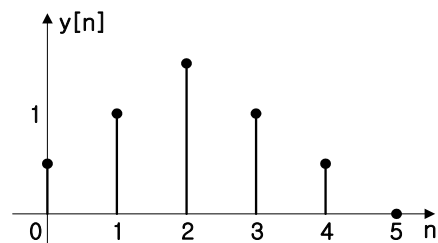
9.3 다음 그림의 $x[n]$ 와 $h[n]$ 에 대해 컨벌루션 $y[n] = x[n] * h[n]$ 을 구하여 결과를 그려라.



Ans)

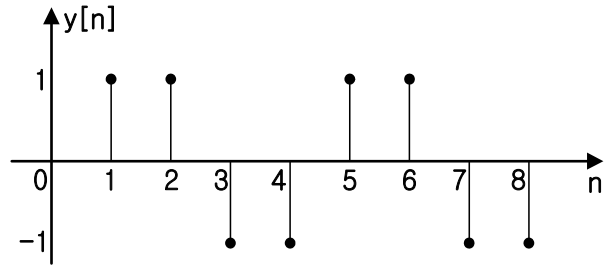
(a)

$x[n-k]$ \ $h[k]$		1	1	1	$y[n]$
$n =$	0	1			1
	1	1	1		2
	2	1	1	1	3
	3		1	1	2
	4			1	1



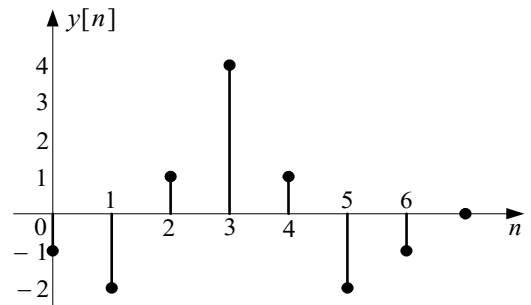
(b)

$n \backslash k$		1	1	$y[n]$
$n =$	1	1		1
	2	0	1	1
	3	-1	0	-1
	4	0	-1	-1
	5	1	0	1
	6	0	1	1
	7	-1	0	-1
	8		-1	-1



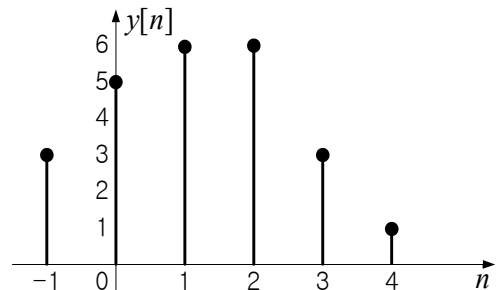
(c)

$n \backslash k$		0	1	2	3	
$x[k]$		1	1	-1	-1	$y[n]$
$h[n-k]$	0	-1				-1
	1	-1	-1			-2
	2	1	-1	-1		1
	3	1	1	-1	-1	4
	4		1	1	-1	1
	5			1	1	-2
	6				1	-1



(d)

$n \backslash k$		-1	0	1	2	
$x[k]$		1	1	1	1	$y[n]$
$h[n-k]$	-1	3				3
	0	2	3			5
	1	1	2	3		6
	2		1	2	3	6
	3			1	2	3
	4				1	1



9.4 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 물음에 답하라.

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

(a) 임펄스 응답을 구하라.

Ans) $h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$

(b) 입력 $x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$ 을 넣을 때 중첩의 원리를 이용하여 출력을 구하라.

Ans) $y[n] = 2h[n] + 4h[n-1] - 2h[n-2] = 2\delta[n] + 5\delta[n-1] - \delta[n-3]$

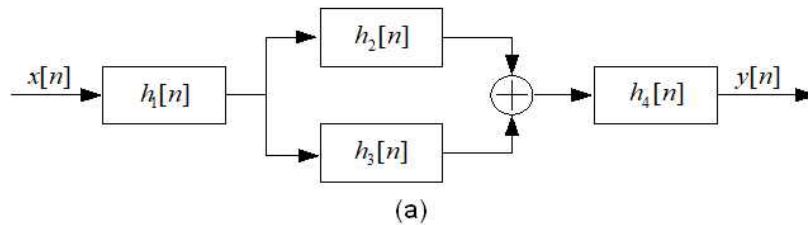
(c) 같은 입력에 대해 컨벌루션을 이용하여 출력을 구하라.

Ans)

$n \backslash k$		0	1	2	
$x[k]$		2	4	-2	$y[n]$
$h[n-k]$	0	1			2
	1	0.5	1		5
	2		0.5	1	0
	4			0.5	-1

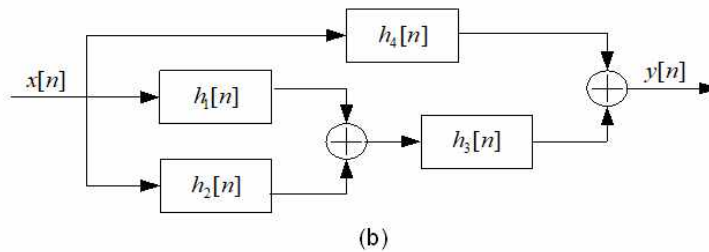
$$\therefore y[n] = \underset{\uparrow}{2} \ 5 \ 0 \ -1 = 2\delta[n] + 5\delta[n-1] - \delta[n-3]$$

9.5 다음 그림과 같이 4개의 이산 LTI 시스템을 연결하였다. 이때 전체 시스템의 임펄스 응답을 구하라. 단, 각 시스템의 임펄스 응답은 다음과 같다.



$$(a) \ h_1[n] = \delta[n] - 3\delta[n-1], \quad h_2[n] = nu[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad h_3[n] = (1-n)u[n-1], \quad h_4[n] = 3^{n+1}u[n]$$

Ans) $h[n] = (h_2[n] + h_3[n]) * h_1[n] * h_4[n] = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + u[n-1] \right\} * 3\delta[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 3u[n-1]$



$$(b) \ h_1[n] = u[n], \quad h_2[n] = -u[n] + u[n-2], \quad h_3[n] = \delta[n-2], \quad h_4[n] = a^n u[n]$$

Ans) $h[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] + h_4[n] = u[n-4] + a^n u[n]$

9.6 다음의 임펄스 응답을 갖는 LTI 시스템의 인과성과 안정도를 판별하라.

$$(a) \ h[n] = (-1)^n u[n]$$

Ans) (i) 인과성 : $h[n] = 0, \quad n < 0$

$\therefore$ 인과 시스템

$$(ii) \text{안정성} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

$\therefore$ 불안정한 시스템

$$(b) \ h[n] = nu[-n]$$

Ans) (i) 인과성 : $h[n] \neq 0, \quad n \leq 0$

$\therefore$ 비인과 시스템

$$(ii) \text{ 안정성 : } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$$

∴ 불안정한 시스템

$$(c) h[n] = (0.5)^{|n|}$$

$$\text{Ans) (i) 인과성 : } h[n] \neq 0, \quad n < 0$$

∴ 비인과 시스템

$$(ii) \text{ 안정성 : } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 3 < \infty$$

∴ 안정한 시스템

$$(d) h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$\text{Ans) (i) 인과성 : } h[n] \neq 0, \quad n \leq 0$$

∴ 비인과 시스템

$$(ii) \text{ 안정성 : } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$$

∴ 불안정한 시스템

$$(e) h[n] = \begin{cases} 2^n, & 0 \leq n \leq 100 \\ 0, & \text{그외} \end{cases}$$

$$\text{Ans) (i) 인과성 : } h[n] = 0, \quad n < 0$$

∴ 인과 시스템

$$(ii) \text{ 안정성 : } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \frac{2^{101} - 1}{2 - 1} < \infty$$

∴ 안정한 시스템

$$(f) h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - 2k]$$

$$\text{Ans) } h[n] = \delta[n] + \delta[n - 2] + \delta[n - 4] + \dots + \delta[n - 2k] + \dots$$

$$(i) \text{ 인과성 : } h[n] = 0, \quad n < 0$$

∴ 인과 시스템

$$(ii) \text{ 안정성 : } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$$

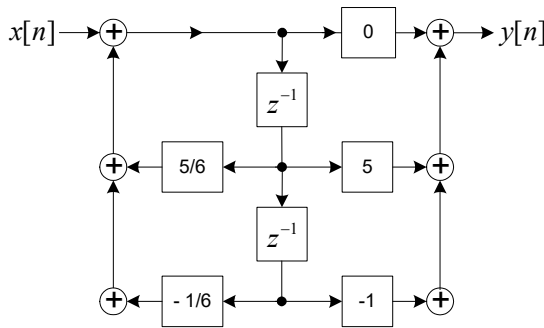
∴ 불안정한 시스템

9.7 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템에 대해 제 2직접형 및 전치 제2 직접형 구현도를 그리고 시스템의 안정도를 판정하라.

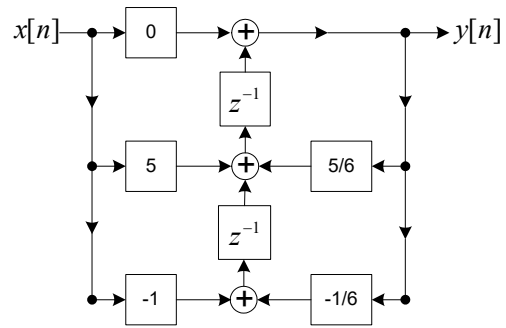
$$(a) y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = 5x[n-1] - x[n-2]$$

$$\text{Ans) } \gamma^2 - \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = (\gamma - \frac{1}{2})(\gamma - \frac{1}{3}) = 0 \rightarrow \therefore \gamma = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

2개의 특성근이 모두 단위원 안에 존재하므로 안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형

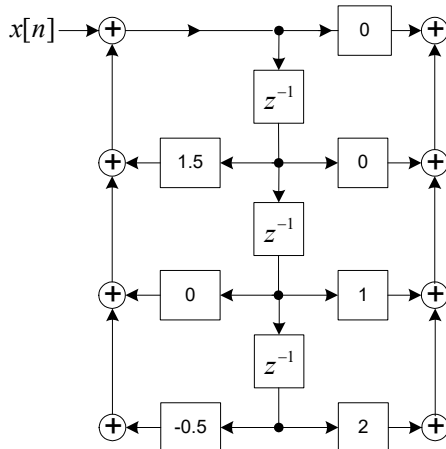


(b) 전치 제2 직접형

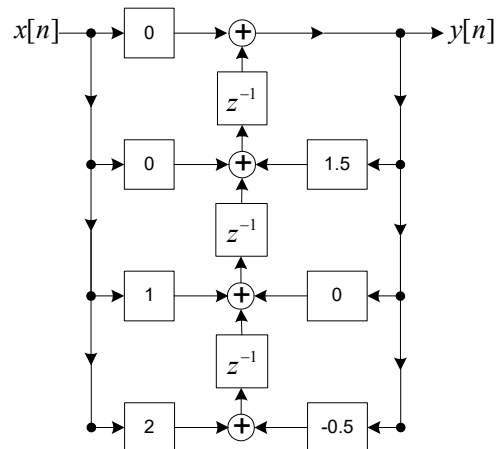
(b) $y[n] - 1.5y[n-1] + 0.5y[n-3] = x[n-2] + 2x[n-3]$

Ans) $(\gamma - 1)^2(\gamma + 0.5) = 0 \rightarrow \therefore \gamma = 1, 1, -0.5$

1개의 특성근이 단위원 안에, 2개의 실수 특성근이 모두 단위원 상에 존재하므로 불안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형

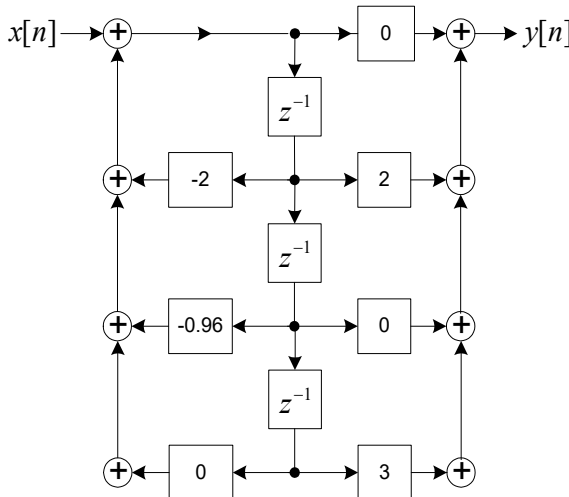


(b) 전치 제2 직접형

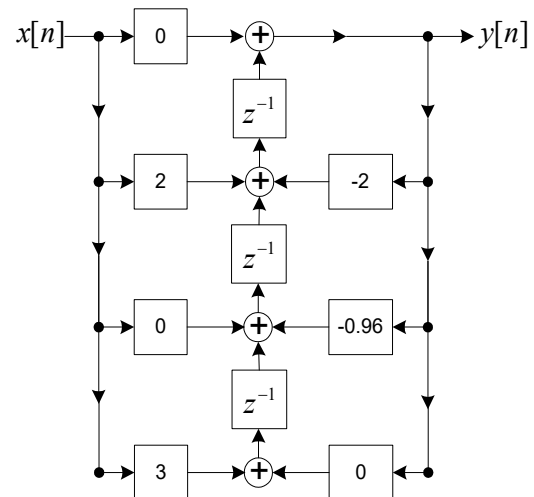
(c) $y[n] + 2y[n-1] + 0.96y[n-2] = 2x[n-1] + 3x[n-3]$

Ans) $(\gamma^2 + 2\gamma + 0.96) = (\gamma + 0.8)(\gamma + 1.2) = 0 \rightarrow \therefore \gamma = -0.8, -1.2$

1개의 특성근($\gamma = -1.2$)이 단위원 밖에 존재하므로 불안정의 경우이다.



(a) 제2 직접형

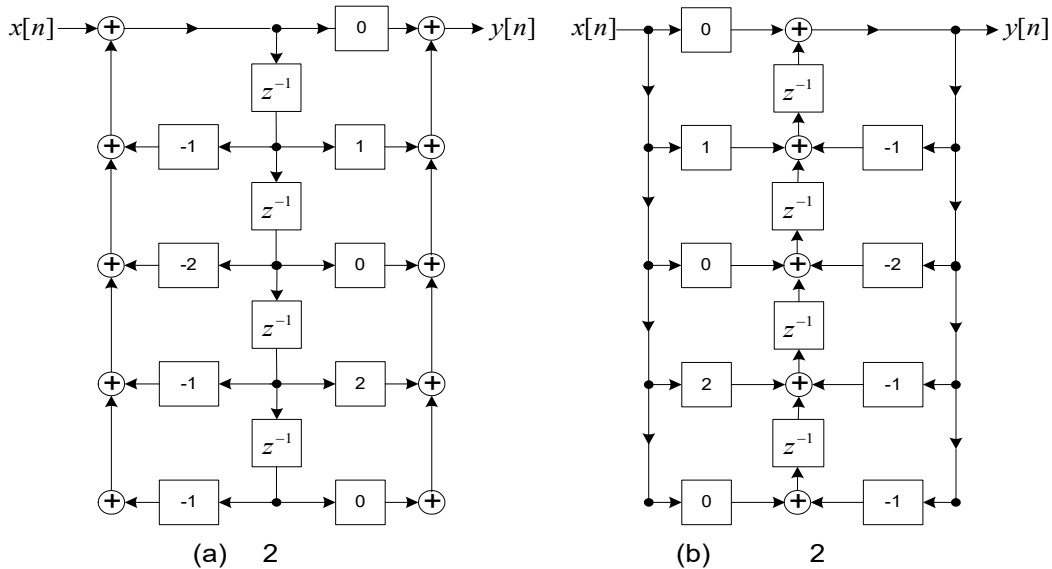


(b) 전치 제2 직접형

(d) $y[n] + y[n-1] + 2y[n-2] + y[n-3] + y[n-4] = x[n-1] + 2x[n-3]$

Ans) $\gamma^4 + \gamma^3 + 2\gamma^2 + \gamma + 1 = (\gamma^2 + 1)(\gamma^2 + \gamma + 1) = 0 \rightarrow \therefore \gamma = \pm j1, \gamma = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$

4개의 복소 특성근이 모두 단위원 상에 존재하므로 임계 안정(불안정)의 경우이다.



9.8 다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템의 임펄스 응답을 반복 대입법과 고전적 해법으로 각각 구하라.

(a) $y[n] + 2y[n-1] = x[n]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n]$$

$$h[0] = -2h[-1] + \delta[0] = 1$$

$$h[1] = -2h[0] + \delta[1] = -2(1) = -2$$

$$h[2] = -2h[1] + \delta[2] = -2(-2) = 4$$

$$h[3] = -2h[2] + \delta[3] = -2(4) = -8$$

$$\vdots$$

$$h[k] = -2h[k-1] + \delta[k] = (-2)^k$$

$$\vdots$$

$$\therefore h[n] = (-2)^n u[n]$$

(ii) 고전적 해법

$$\gamma + 2 = 0 \rightarrow \therefore \gamma = -2$$

$$h[n] = c(-2)^n$$

$$\therefore h[n] = (-2)^n u[n]$$

(b) $y[n] + 2y[n-1] = x[n] + x[n-1]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\begin{aligned}
 h[0] &= -2h[-1] + \delta[0] + \delta[-1] = 1 \\
 h[1] &= -2h[0] + \delta[1] + \delta[0] = -2(1) + 1 = -1 = 2(-2)^{-1} \\
 h[2] &= -2h[1] + \delta[2] + \delta[1] = -2(-1) = 2 = 2(-2)^0 \\
 h[3] &= -2h[2] + \delta[3] + \delta[2] = -2(2) = -4 = 2(-2)^1 \\
 h[4] &= -2h[3] + \delta[4] + \delta[3] = -2(-4) = 8 = 2(-2)^2 \\
 &\vdots \\
 h[k] &= -2h[k-1] + \delta[k] + \delta[k-1] = 2(-2)^{k-2} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\therefore h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2(-2)^{n-2} = \frac{1}{2}(-2)^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

(ii) 고전적 해법

$$h[n] = c(-2)^n$$

$$\therefore h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(-2)^n, & n \geq 1 \end{cases}$$

(c) $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$\begin{aligned}
 h[n] &= -3h[n-1] - 2h[n-2] + \delta[n] + \delta[n-1] \\
 h[0] &= -3h[-1] - 2h[-2] + \delta[0] + \delta[-1] = 1 \\
 h[1] &= -3h[0] - 2h[-1] + \delta[1] + \delta[0] = -2 = (-2)^1 \\
 h[2] &= -3h[1] - 2h[0] + \delta[2] + \delta[1] = 4 = (-2)^2 \\
 h[3] &= -3h[2] - 2h[1] + \delta[3] + \delta[2] = -8 = (-2)^3 \\
 &\vdots \\
 h[k] &= -3h[k-1] - 2h[k-2] + \delta[k] + \delta[k-1] = (-2)^k \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\therefore h[n] = (-2)^n$$

(ii) 고전적 해법

$$\gamma^2 + 3\gamma + 2 = 0 \rightarrow \gamma = -1, -2$$

$$h[n] = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n$$

$$\therefore h[n] = (-2)^n u[n]$$

(d) $y[n] - 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n]$

Ans)

(i) 반복 대입법

$$\begin{aligned}
 h[n] &= 4h[n-1] - 4h[n-2] + \delta[n] \\
 h[0] &= 4h[-1] - 4h[-2] + \delta[0] = 1 \\
 h[1] &= 4h[0] - 4h[-1] + \delta[1] = 4 = 2 \times 2^1 \\
 h[2] &= 4h[1] - 4h[0] + \delta[2] = 12 = 3 \times 2^2 \\
 h[3] &= 4h[2] - 4h[1] + \delta[3] = 32 = 4 \times 2^3 \\
 h[4] &= 4h[3] - 4h[2] + \delta[4] = 80 = 5 \times 2^4 \\
 &\vdots \\
 h[k] &= 4h[k-1] - 4h[k-2] + \delta[k] = (1+k) \times 2^k \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\therefore h[n] = (1+n)2^n$$

(ii) 고전적 해법

$$\begin{aligned}\gamma^2 - 4\gamma + 4 &= 0 \rightarrow \therefore \gamma = 2(\text{중근}) \\ h[n] &= (c_1 + c_2 n) 2^n \\ \therefore h[n] &= (1 + n) 2^n\end{aligned}$$

9.9 차분 방정식 $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{8}x[n-2]$ 으로 표현되는 이산 시스템이 $y[n] = \delta[n]$ 의 출력을 내도록 하는 입력 $x[n]$ 을 구하라.

Ans) $y[n] = \delta[n]$ 을 주어진 차분 방정식에 대입하면

$$\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1] = x[n] - \frac{1}{8}x[n-2]$$

위 식을 $x[n]$ 에 대해 정리하면

$$x[n] = \frac{1}{8}x[n-2] + \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

$$\therefore x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n}{2}}, & n = \text{짝수} \\ -2\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{n+1}{2}}, & n = \text{홀수} \end{cases}$$

9.10 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 입력 $x[n] = u[n]$ 을 인가할 때, 출력 $y[n]$ 을 구하라.

(a) $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] + 0.5x[n-1], \quad y[-1] = 1$

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c(0.5)^n + 3$

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] + 0.5x[n-1]$$

$$y[0] = 0.5y[-1] + x[0] + 0.5x[-1] = 0.5 + 1 = 1.5$$

$$\therefore y[n] = -1.5(0.5)^n + 3$$

(b) $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = 1$

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-1)^n + c_2(2)^n - \frac{1}{2}$

$$y[n] = x[n] + y[n-1] + 2y[n-2]$$

$$y[0] = x[0] + y[-1] + 2y[-2] = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$y[1] = x[1] + y[0] + 2y[-1] = 1 + 4 + 2 = 7$$

$$\therefore y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \frac{1}{2}(-1)^n + 4(2)^n - \frac{1}{2}$$

(c) $y[n] + y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n], \quad y[-1] = 0, \quad y[-2] = 1$

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (c_1n + c_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{9}$

$$y[n] = -y[n-1] - 0.25y[n-2] + x[n]$$

$$y[0] = x[0] - y[-1] - 0.25y[-2] = 1 - 0 - 0.25 = 0.75$$

$$y[1] = x[1] - y[0] - 0.25y[-1] = 1 - 0.75 - 0.25 \times 0 = 0.25$$

$$\therefore y[n] = \left(\frac{1}{12}n + \frac{11}{36} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{4}{9}$$

$$(d) \quad y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = \frac{3}{8}x[n], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = 1$$

$$\text{Ans)} \quad y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1 \left(\frac{1}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1}{4} \right)^n + 1$$

$$y[n] = \frac{3}{8}x[n] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]$$

$$y[0] = \frac{3}{8}x[0] + \frac{3}{4}y[-1] - \frac{1}{8}y[-2] = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = 1$$

$$y[1] = \frac{3}{8}x[1] + \frac{3}{4}y[0] - \frac{1}{8}y[-1] = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = 1$$

$$\therefore y[n] = 1$$

[응용 문제]

9.11 $x[n] = 1, -3 \leq n \leq 3$ 과 $h[n] = -n + 6, 1 \leq n \leq 5$ 의 컨벌루션 $y[n] = x[n] * h[n]$ 에 대한 다음의 설명 중 틀린 것은?

- ㉠ 두 신호 중 어느 신호를 반전시켜 이동시켜 계산하더라도 같은 결과를 얻는다.
- ㉡ 컨벌루션 결과 $y[n]$ 은 유효 구간 내의 시간 n 에 대해 양의 값이 된다.
- ㉢ 컨벌루션 결과 $y[n]$ 은 $-2 \leq n \leq 8$ 구간에 존재한다.
- ㉣ 컨벌루션 결과 $y[n]$ 의 길이는 $N = 12$ 이다.

Ans) ㉣

9.12 이산 LTI 시스템의 입력 $x[n]$ 에 대한 출력 $y[n]$ 가 다음과 같을 때, 임펄스 응답 $h[n]$ 을 구하라.

(a) $x[n] = [1, 1, 2], y[n] = [1, -1, 3, -1, 6]$

$\uparrow$
 $n=0$

$\uparrow$
 $n=1$

Ans) $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^2 x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$

$\therefore h[n] = [1, -2, 3]$

$\uparrow$
 $n=0$

(b) $x[n] = [2, -1, 3], y[n] = [2, 3, 5, 10, 3, 9]$

$\uparrow$
 $n=0$

$\uparrow$
 $n=1$

Ans) $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^2 x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2]$

$\therefore h[n] = [1, 2, 2, 3]$

$\uparrow$
 $n=0$

(c) $x[n] = [2, 4, 6, 8, 10, \dots], y[n] = [1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots]$

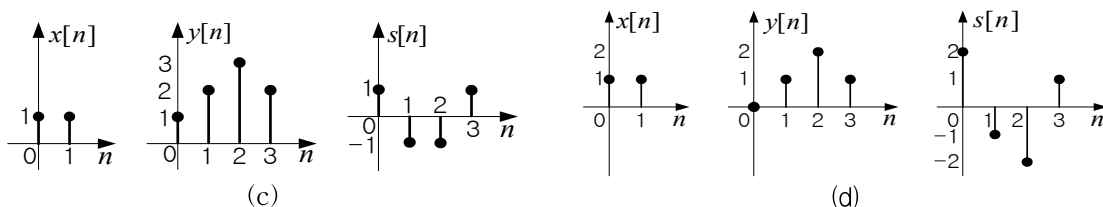
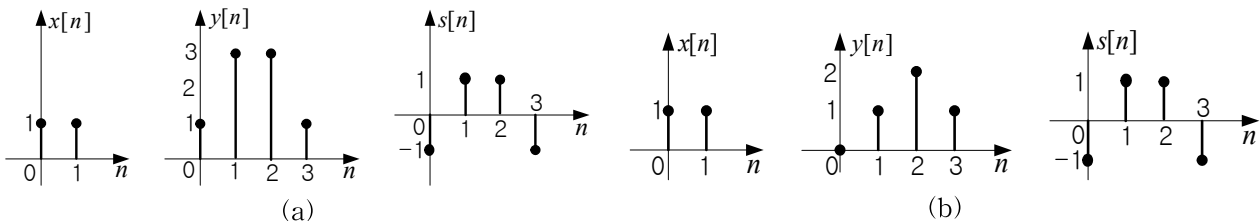
$\uparrow$
 $n=0$

$\uparrow$
 $n=0$

Ans) $y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]$
 $= x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + \dots + x[k]h[n-k] + \dots + x[n]h[0]$
 $\therefore h[n] = [0.5, 0.5]$

$\uparrow$
 $n=0$

9.13 이산 LTI 시스템의 입력 $x[n]$ 에 대한 출력 $y[n]$ 이 아래 그림과 같을 때, 시스템의 임펄스 응답을 구하고, 이를 이용하여 신호 $s[n]$ 을 입력으로 넣을 때 출력 $z[n]$ 을 구하라.



(a)

Ans) (1) 임펄스 응답 $h[n]$

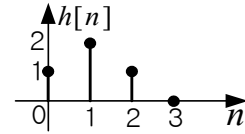
$$y[n] = h[n] + h[n-1]$$

$$y[0] = h[0] = 1$$

$$y[1] = h[1] + h[0] = 3 \quad \therefore h[1] = 2$$

$$y[2] = h[2] + h[1] = 3 \quad \therefore h[2] = 1$$

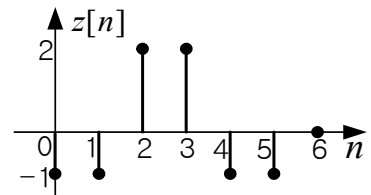
$$y[3] = h[3] + h[2] = 1 \quad \therefore h[3] = 0$$



(2) 입력 $x[n]$ 에 대한 출력 $z[n]$

$$z[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k]$$

$n \backslash k$		0	1	2	3	
$s[k]$		-1	1	1	-1	$z[n]$
$h[n-k]$	0	1				-1
	1	2	1			-1
	2	1	2	1		2
	3		1	2	1	2
	4			1	2	-1
	5				1	-1



(b)

Ans) (1) 임펄스 응답 $h[n]$

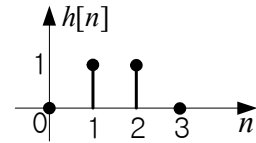
$$y[n] = h[n] + h[n-1]$$

$$y[0] = h[0] = 0$$

$$y[1] = h[1] + h[0] = 1 \quad \therefore h[1] = 1$$

$$y[2] = h[2] + h[1] = 2 \quad \therefore h[2] = 1$$

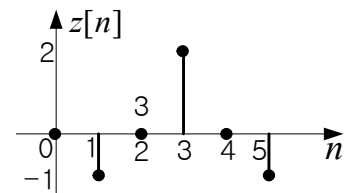
$$y[3] = h[3] + h[2] = 1 \quad \therefore h[3] = 0$$



(2) 입력 $x[n]$ 에 대한 출력 $z[n]$

$$z[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k]$$

$n \backslash k$		0	1	2	3	
$s[k]$		-1	1	1	-1	$z[n]$
$h[n-k]$	0	0				0
	1	1	0			-1
	2	1	1	0		0
	3	0	1	1	0	2
	4		0	1	1	0
	5			0	1	-1



(c)

Ans) (1) 임펄스 응답 $h[n]$

$$y[n] = h[n] + h[n-1]$$

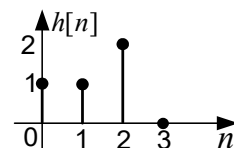
$$y[0] = h[0] = 1$$

$$y[1] = h[1] + h[0] = 2 \quad \therefore h[1] = 1$$

$$y[2] = h[2] + h[1] = 3 \quad \therefore h[2] = 2$$

$$y[3] = h[3] + h[2] = 2 \quad \therefore h[3] = 0$$

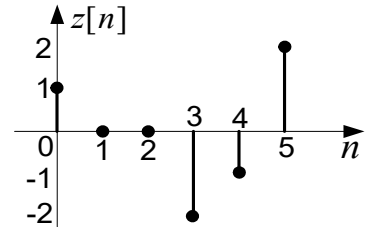
$$y[4] = h[4] + h[3] = 0 \quad \therefore h[4] = 0$$



(2) 입력 $x[n]$ 에 대한 출력 $z[n]$

$$z[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k]$$

	$n \backslash k$	0	1	2	3	
$s[k]$		1	-1	-1	1	$z[n]$
$h[n-k]$	0	1				1
	1	1	1			0
	2	2	1	1		0
	3		2	1	1	-2
	4			2	1	-1
	5				2	2

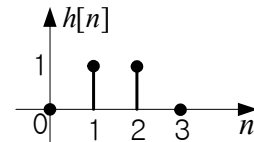


(d)

Ans) (1) 임펄스 응답 $h[n]$

$$y[n] = h[n] + h[n-1]$$

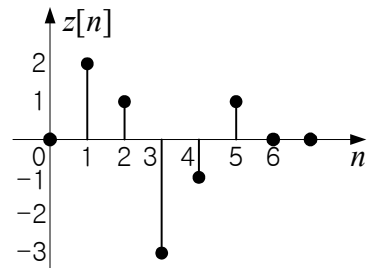
$$\begin{aligned} y[0] &= h[0] = 0 & \therefore h[0] &= 0 \\ y[1] &= h[1] + h[0] = 1 & \therefore h[1] &= 1 \\ y[2] &= h[2] + h[1] = 2 & \therefore h[2] &= 1 \\ y[3] &= h[3] + h[2] = 1 & \therefore h[3] &= 0 \\ y[4] &= h[4] + h[3] = 0 & \therefore h[4] &= 0 \end{aligned}$$



(2) 입력 $x[n]$ 에 대한 출력 $z[n]$

$$z[n] = s[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]h[n-k]$$

	$n \backslash k$	0	1	2	3	
$v[k]$		2	-1	-2	1	$z[n]$
$h[n-k]$	1	1				2
	2	1	1			1
	3		1	1		-3
	4			1	1	-1
	5				1	1



9.14 LTI시스템의 입출력 관계가 다음과 같이 주어졌다. 각각의 경우에 대하여 시스템의 임펄스 응답을 구하고 인과성과 안정성을 판별하라.

(a) $y[n] = x[n-3]$

Ans) $h[n] = \delta[n-3]$

(i) 인과성

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

따라서 $h[n] = 0, n < 0$ 을 만족하므로 이 시스템은 인과 시스템이다.

(ii) 안정성

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\delta[n-3]| = 1$$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ 를 만족하므로 이 시스템은 안정한 시스템이다.

$$(b) \ y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k-3]$$

$$\text{Ans) } h[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k-3] = \sum_{i=-\infty}^{n-3} \delta[i] = u[n-3]$$

(i) 인과성

$$h[n] = u[n-3] = \begin{cases} 0, & n < 3 \\ 1, & n \geq 3 \end{cases}$$

따라서 $h[n] = 0, n < 0$ 을 만족하므로 이 시스템은 인과적인 시스템이다.

(ii) 안정성

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n-3]| = \sum_{k=3}^{\infty} 1 = \infty$$

따라서 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ 을 만족하지 않으므로 이 시스템은 불안정한 시스템이다.

$$(c) \ y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} x[k-3]$$

$$\text{Ans) } h[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^{k-n} \delta[k-3] = 2^{3-n} u[n-3] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u[n-3]$$

(i) 인과성

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u[n-3] = \begin{cases} 0, & n < 3 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}, & n \geq 3 \end{cases}$$

따라서 $h[n] = 0, n < 0$ 을 만족하므로 이 시스템은 인과적인 시스템이다.

(ii) 안정성

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u[n-3]\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

따라서 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ 을 만족하므로 이 시스템은 안정한 시스템이다.

9.15 시스템의 입력 $x[n]$ 과 임펄스 응답 $h[n]$ 이 다음과 같을 때, 시스템의 출력 $y[n]$ 을 구하라.

$$(a) \ x[n] = u[n], \quad h[n] = \delta[n]$$

$$\text{Ans) } y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \delta[n-k] = u[n]$$

$$(b) \ x[n] = u[n], \quad h[n] = u[n] - u[n-10]$$

$$\text{Ans) } y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k] h[k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] = \sum_{k=0}^n 1 = \begin{cases} n+1, & 0 \leq n \leq 9 \\ 10, & n \geq 10 \end{cases}$$

$$(c) \ x[n] = nu[n], \quad h[n] = u[n] - u[n-10]$$

$$\begin{aligned} \text{Ans)} \quad y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ku[k](u[n-k] - u[n-k-10]) = \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^{n-10} k \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^n k, & 0 \leq n \leq 10 \\ \sum_{k=n-9}^n k, & n \geq 11 \end{cases} \end{aligned}$$

(d) $x[n] = u[n], \quad h[n] = u[n-3]$

$$\text{Ans)} \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] = \sum_{k=3}^n 1 = (n-2)u[n-2]$$

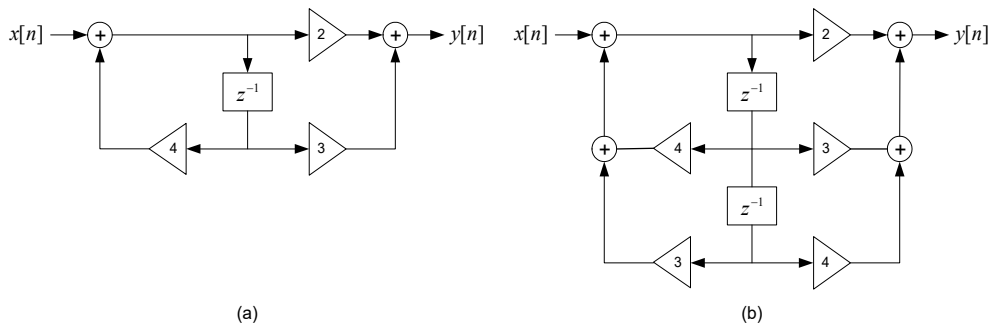
(e) $x[n] = u[n], \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$\text{Ans)} \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 0$$

(f) $x[n] = u[n], \quad h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-2]$

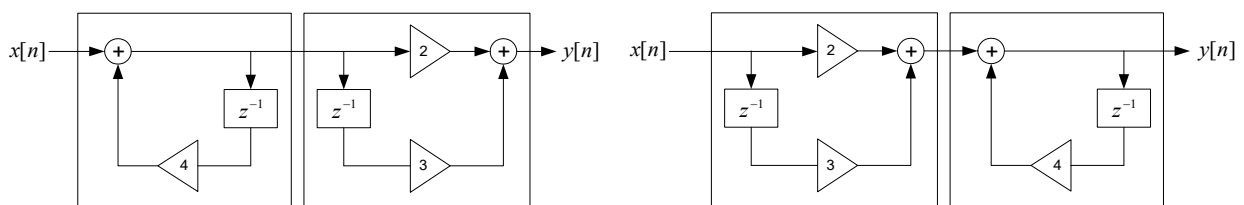
$$\text{Ans)} \quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 2$$

9.16 다음 그림과 같은 블록선도로 표현되는 이산 시스템에 대한 차분 방정식을 구하라.

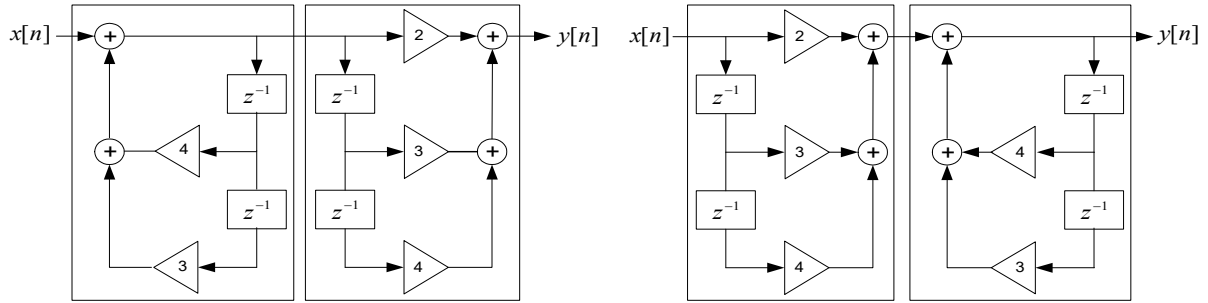


Ans)

(a) $y[n] = 4y[n-1] + 2x[n] + 3x[n-1] \rightarrow \therefore y[n] - 4y[n-1] = 2x[n] + 3x[n-1]$



(b) $y[n] - 4y[n-1] - 3y[n-2] = 2x[n] + 3x[n-1] + 4x[n-2]$



9.17 $y[n] + 4y[n-1] + 5y[n-2] + 2y[n-3] = x[n-1]$, $x[n] = (0.5)^n$ 의 해에 포함되지 않는 항을 모두 골라라.

- ㉠ $(-1)^n$ ㉡ $n(-1)^n$ ㉢ $n^2(-1)^n$ ㉣ $(-2)^n$
 ㉤ $n(-2)^n$ ㉥ $n^2(-2)^n$ ㉦ $(0.5)^n$ ㉧ $n(0.5)^n$

Ans) ㉠, ㉤, ㉥, ㉦, ㉧

시스템 모드는 $(-1)^n$, $n(-1)^n$, $(-2)^n$ & 특이해는 $(0.5)^n$ 풀

9.18 다음 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템에 대해 입력이 $x[n] = 0$, $x[n] = \delta[n]$, $x[n] = u[n]$, $x[n] = (0.5)^n u[n]$ 일 때의 출력을 각각 구하라.

(a) $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$, $y[-1] = 0$, $y[-2] = 1$

Ans)

(i) $x[n] = 0$

이 경우 차분 방정식은 다음과 같은 동차 방정식이 된다.

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 0$$

$$y[n] = y_h[n] = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n$$

주어진 초기 조건을 이용하여 계수를 구하면

$$\therefore y[n] = -4(-2)^n + 2(-1)^n$$

(ii) $x[n] = \delta[n]$

이 경우 $n > 0$ 에서는 (i)의 경우와 같다. 즉

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 0$$

$$\therefore y[n] = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n, \quad n > 0$$

$n = 0$ 에서는 차분 방정식이 아래와 같이 되어 새로운 초기 조건을 얻을 수 있다.

$$y[0] + 3y[-1] + 2y[-2] = 1 \rightarrow \therefore y[0] = -3y[-1] - 2y[-2] + 1 = -1$$

$$y[1] + 3y[0] + 2y[-1] = 0 \rightarrow \therefore y[1] = -3y[0] - 2y[-1] = 3$$

$$\therefore y[n] = -2(-2)^n + (-1)^n, \quad n \geq 0$$

(iii) $x[n] = u[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n + \frac{1}{6}$$

$$y[0] = -3y[-1] - 2y[-2] + x[0] = 0 - 2 + 1 = -1$$

$$y[1] = -3y[0] - 2y[-1] + x[1] = 3 - 0 + 1 = 4$$

$$\therefore y[n] = -\frac{16}{6}(-2)^n + \frac{9}{6}(-1)^n + \frac{1}{6}$$

(iv) $x[n] = (0.5)^n u[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n + \frac{1}{15}(0.5)^n$$

$$y[0] = -3y[-1] - 2y[-2] + x[0] = 0 - 2 + 1 = -1$$

$$y[1] = -3y[0] - 2y[-1] + x[1] = 3 - 0 + 0.5 = 3.5$$

$$\therefore y[n] = -\frac{12}{5}(-2)^n + \frac{4}{3}(-1)^n + \frac{1}{15}(0.5)^n$$

(b) $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n], \quad y[-1] = 1, \quad y[-2] = 1$

Ans)

(i) $x[n] = 0$

이 경우 차분 방정식은 다음과 같은 동차 방정식이 된다.

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0$$

$$y[n] = y_h[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n$$

$$\therefore y[n] = (-2n - 3)(-1)^n$$

(ii) $x[n] = \delta[n]$

이 경우 $n > 0$ 에서는 (i)의 경우와 같다.

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0$$

$$\therefore y[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n, \quad n > 0$$

$n = 0$ 에서는 차분 방정식이 아래와 같이 되어 새로운 초기 조건을 얻을 수 있다.

$$y[0] + 2y[-1] + y[-2] = 1 \quad \rightarrow \quad \therefore y[0] = -2y[-1] - y[-2] + 1 = -2$$

$$y[1] + 2y[0] + y[-1] = 0 \quad \rightarrow \quad \therefore y[1] = -2y[0] - y[-1] = 3$$

$$\therefore y[n] = (-n - 2)(-1)^n, \quad n \geq 0$$

(iii) $x[n] = u[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n + \frac{1}{4}$$

$$y[0] = -2y[-1] - y[-2] + x[0] = -2 - 1 + 1 = -2$$

$$y[1] = -2y[0] - y[-1] + x[1] = 4 - 1 + 1 = 4$$

$$\therefore y[n] = \left(-\frac{3}{2}n - \frac{9}{4}\right)(-1)^n + \frac{1}{4}$$

(iv) $x[n] = (0.5)^n u[n]$

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (c_1 n + c_2)(-1)^n + \frac{1}{9}(0.5)^n$$

$$y[0] = -2y[-1] - y[-2] + x[0] = -2 - 1 + 1 = -2$$

$$y[1] = -2y[0] - y[-1] + x[1] = 4 - 1 + 0.5 = 3.5$$

$$\therefore y[n] = \left(-\frac{4}{3}n - \frac{19}{9}\right)(-1)^n + \frac{1}{9}(0.5)^n$$

9.19 2차 이산 LTI 시스템이 $n < 0$ 에서 모든 초기 조건이 0일 때 입력 $x[n] = u[n]$ 에 대한 출력이 다음과 같다고 한다. 이 시스템의 차분 방정식을 구하라.

$$y[n] = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{4}{3}(-2)^n + \frac{1}{6}, \quad n \geq 0$$

Ans) 특성 방정식 : $(\gamma+1)(\gamma+2) = \gamma^2 + 3\gamma + 2 = 0$

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = c_1 x[n] + c_2 x[n-1] + c_3 x[n-2]$$

$$y[0] = -\frac{1}{2}(-1)^0 + \frac{4}{3}(-2)^0 + \frac{1}{6} = 1$$

$$y[1] = -\frac{1}{2}(-1)^1 + \frac{4}{3}(-2)^1 + \frac{1}{6} = -2 \quad \rightarrow \quad \therefore c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$$

$$y[2] = -\frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{4}{3}(-2)^2 + \frac{1}{6} = 5$$

$$\therefore y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n]$$

9.20 이산 LTI 시스템이 다음과 같을 때 물음에 답하라.

$$y[n] + ay[n-1] = x[n]$$

(a) $x[n] = u[n]$, $y[-1] = 1$ 일 때 출력을 구하라.

Ans) $n=0$: $y[0] = -ay[-1] + 1 = -a + 1$

$$n=1$$
 : $y[1] = -ay[0] + 1 = a^2 - a + 1$

$$n=2$$
 : $y[2] = -ay[1] + 1 = -a^3 + a^2 - a + 1$

$$\vdots$$

$$n=k$$
 : $y[k] = -ay[k-1] + 1 = (-a)^{k+1} + (-a)^k + \dots + (-a)^2 + (-a) + 1$

$$\vdots$$

$$\therefore y[n] = \sum_{k=0}^{n+1} (-a)^k$$

(b) $x[n] = 2u[n]$, $y[-1] = 1$ 일 때 출력을 구하라.

Ans) $n=0$: $y[0] = -ay[-1] + 2 = -a + 2$

$$n=1$$
 : $y[1] = -ay[0] + 2 = a^2 - 2a + 2$

$$n=2$$
 : $y[2] = -ay[1] + 2 = -a^3 + 2a^2 - 2a + 2$

$$\vdots$$

$$n=k$$
 : $y[k] = -ay[k-1] + 2 = (-a)^{k+1} + 2(-a)^k + \dots + 2(-a)^2 + 2(-a) + 2$

$$\vdots$$

$$\therefore y[n] = (-a)^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^n (-a)^k$$

(c) $x[n] = 2u[n]$, $y[-1] = 2$ 일 때 출력을 구하라.

Ans) $n=0$: $y[0] = -ay[-1] + 2 = -2a + 2$

$$n=1$$
 : $y[1] = -ay[0] + 2 = 2a^2 - 2a + 2$

$$n=2$$
 : $y[2] = -ay[1] + 2 = -2a^3 + 2a^2 - 2a + 2$

$$\vdots$$

$$n=k$$
 : $y[k] = -ay[k-1] + 2 = 2(-a)^{k+1} + 2(-a)^k + \dots + 2(-a)^2 + 2(-a) + 2$

$$\vdots$$

$$\therefore y[n] = 2 \sum_{k=0}^{n+1} (-a)^k$$

(d) $x[n] = (0.5)^n u[n]$, $y[-1] = 1$ 일 때 출력을 구하라.

Ans) $y[n] = y_h[n] + y_p[n] = c(-a)^n + \frac{1}{2a+1}(0.5)^n$

$$y[0] = -ay[-1] + x[0] = -a + 1$$

$$-a+1=c+\frac{1}{2a+1} \rightarrow c=-a+\frac{2a}{2a+1}$$

$$\therefore y[n] = y_h[n] + y_p[n] = (-a + \frac{2a}{2a+1})(-a)^n + \frac{1}{2a+1}(0.5)^n = (-a)^{n+1} + \frac{-2(-a)^{n+1} + (0.5)^n}{2a+1}$$

(e) $x[n] = (0.5)^n u[n] + u[n]$, $y[-1] = 2$ 일 때 출력을 구하라.

Ans) $x[n]$ 과 초기 조건은 (a)와 (d)의 경우를 더한 것과 같으므로, 중첩의 원리에 의하여 출력은 (a)와 (d)의 출력을 더하면 된다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{n+1} (-a)^k + (-a)^{n+1} + \sum_{k=0}^n (-a)^n [(-a)^{-1}(0.5)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-a)^k + (-a)^{n+1} + \frac{-2(-a)^{n+1} + (0.5)^n}{2a+1} \end{aligned}$$

(f) 이상의 계산 결과로부터 출력과 초기 조건의 연관 관계를 설명하라.

Ans) (a)는 입력과 초기 조건이 모두 존재하는 경우의 시스템 응답을 보여준다.

(b)와 (c)는 입력이 2배가 되더라도 초기 조건이 2배가 되지 않으면 전체적인 출력이 2배가 되지 않음을 보여준다. 다시 말해 입력과 초기 조건이 모두 2배가 되어야만 선형성의 동차성이 만족됨을 보여준다.

(e)는 서로 다른 입력이 더해져서 입력으로 인가될 때 각각의 초기 조건도 더해진 초기 조건이 되어야만 선형성의 가산성이 성립함을 보여준다.

이상의 사실로부터 만약 초기 조건이 0이 아닐 경우 시스템의 입출력 관계가 선형성을 만족하려면 입력 뿐만 아니라 초기 조건도 반드시 동차성과 가산성이 만족되도록 변경되어야 함을 알 수 있다.

초기 조건에 상관없이 선형성이 항상 성립하려면 시스템이 초기 휴지 상태(initially at rest), 즉 모든 초기 조건이 0이라는 전제가 있어야 한다.